Michiel Bertsch, Roberta Dal Passo, Lorenzo Giacomelli
Analisi matematica, 2ª ed., MacGraw-Hill, 2011

Dimostrazione del Teorema 4.3 (il numero di Nepero), pag. 113 [B]

Dobbiamo dimostrare che la successione $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ per $n = 1, 2\dots$ è strettamente crescente e limitata.

Proviamo prima che $\{a_n\}$ è strettamente crescente. Per $n \geq 2$, si ha:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n}{\frac{n-1}{n}} = \frac{\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{n}}.$$

Per la disuguaglianza di Bernoulli (si veda la (1.37)) $(1 - \frac{1}{n^2})^n \geq 1 - \frac{n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$, quindi $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$ ovvero $\{a_n\}$ è crescente.

Per provare che $\{a_n\}$ è limitata, si consideri la successione $\{b_n\}$ definita da

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) > a_n. \qquad \text{(D4.1)}$$

Per ogni $n \geq 2$ si ha:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right)^n}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{n}}{\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{\left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n}.$$

Per la disuguaglianza di Bernoulli,

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n},$$

quindi $\frac{b_n}{b_{n-1}} < 1$, ovvero $\{b_n\}$ è decrescente. Allora, per la (D4.1), $0 < a_n < b_n < b_1 = 4$ e $\{a_n\}$ è limitata.